

## Representación gráfica de las funciones complejas con el *Mathematica*

### Graphical display of complex functions with *Mathematica*

Ricardo Velezmoro y Robert Ipanaqué

Universidad Nacional de Piura, Urb. Miraflores s/n, Castilla, Piura, Perú.

#### Resumen

La representación gráfica de las funciones de valor complejo, de una variable compleja, es un tema de mucho interés dado que la gráfica de una función de este tipo tendría que ser dibujada en un espacio tetra dimensional. Este artículo presenta una propuesta para representar tales gráficas mediante el uso de un modelo basado en una submersión, del espacio tetra dimensional en el espacio tridimensional; para luego, con ayuda del *Mathematica* llegar a obtener una representación de las mencionadas gráficas en una pantalla 2D. Adicionalmente, se implementarán algunos comandos en el *Mathematica*, los mismos que permitirán realizar las representaciones de variados e interesantes ejemplos.

**Descriptor:** función compleja, visualización, submersión

#### Abstract

The graphical display of complex-valued functions of a complex variable is a subject of much interest since the graph of such a function would have to be drawn in a four-dimensional space. This article presents a proposal to display such graphs using a model based on a submersion, from four-dimensional space to three-dimensional space; then, with the help of *Mathematica* arrive at a representation of the graphs mentioned in a 2D screen. Additionally, some commands are implemented in *Mathematica*, the same that will make representations varied and interesting examples.

**Keywords:** complex function, visualization, submersion

#### 1. Introducción

La representación gráfica de las funciones de valor complejo, de una variable compleja, es un tema ampliamente estudiado [1, 2, 3, 5]. Hasta la fecha destacan, básicamente, cinco técnicas para representar las funciones complejas: usando modelos 3D, mapeos de colores 2D, trazado de vectores 2D, proyección en perspectiva 4D y mapeos conformes [4]. No es de extrañar que uno de los más populares sistemas de cálculo simbólico, el *Mathematica*, incluya una serie de comandos para analizar funciones complejas [6, 7]. Sin embargo, no se ha ideado aun un modelo que permita representar en 2D una función compleja, cuya gráfica tendría que ser dibujada en un espacio tetra dimensional, submersa en el espacio 3D.

En este artículo se presenta una propuesta para representar tales gráficas mediante el uso de un modelo basado en una submersión  $\psi$ , del espacio tetra dimensional en el espacio tridimensional. Básicamente, se transforman los puntos  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ , que pertenecen a la función compleja que se desea representar, aplicando la submersión  $\psi$ . Luego, aprovechando los comandos altamente desarrollados del *Mathematica* se representa  $\psi(\mathbf{p})$  como si se contase con un ambiente 3D (sala de hologramas), aunque en la realidad se trata de una representación en una pantalla 2D.

#### 2. Descripción del modelo.

Se parte de una porción del espacio tridimensional, que se ha encajado en un cubo. Dicho cubo tiene

como centro de gravedad el origen de coordenadas del sistema cartesiano tridimensional. Ubiquemos, en el cubo, cuatro ejes coordenados:  $x, y, z, w$  y tomemos los vectores unitarios:

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ y } e_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right);$$

en la dirección de estos ejes (Fig. 1) [8].

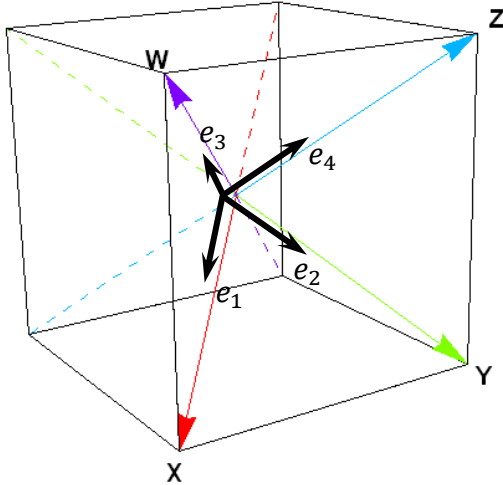


Figura 1: Vectores unitarios,  $e_i, i = 1,2,3,4$ , a partir de los cuales se definirá la submersión  $\psi$ .

Luego, definamos la submersión  $\psi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que  $\psi(p) = p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3 + p_4e_4$ , para todo  $p \in \mathbb{R}^4$ .

Por otra parte, dada la función

$$F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \rightarrow w = F(z)$$

cuya gráfica

$$\{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid w = F(z)\}$$

está contenida en el espacio tetra dimensional, dado que existe una correspondencia entre  $\mathbb{C}$  y los puntos del plano  $\mathbb{R}^2$ . Si consideramos

$$z = x + iy \text{ y } w = u + iv$$

con  $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ , la gráfica de  $F$  será

$$\{(x + iy, u + iv) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid u + iv = F(x + iy)\}.$$

Nuevamente, por la correspondencia entre  $\mathbb{C}$  y los puntos del plano, podemos asociar el número complejo  $x + iy$  con el punto  $(x, y)$ ; y de modo similar el número complejo  $u + iv$  con el punto  $(u, v)$ . Así la gráfica de  $F$  será, ahora,

$$\{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid u = u(x, y) \wedge v = v(x, y)\}$$

ó

$$\{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 \mid u = u(x, y) \wedge v = v(x, y)\}.$$

Con esto es posible realizar la submersión de los puntos  $(x, y, u, v)$  mediante la aplicación de la submersión  $\psi$  y representar la gráfica de

$$\psi(x, y, u, v) = xe_1 + ye_2 + ue_3 + ve_4,$$

esto es,

$$\psi(x, y, u, v) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y + u + v, -x + y - u + v, -x - y + u + v).$$

### 3. Resultados y discusión

Empezaremos por definir el comando **psi**, en el *Mathematica*.

```
{e1, e2, e3, e4} :=
  1/sqrt(3){{1, -1, -1}, {1, 1, -1}, {1, 1, 1}, {1, -1, 1}};
psi[{p1_, p2_, p3_, p4_}] :=
  p1e1 + p2e2 + p3e3 + p4e4
```

Seguidamente, definimos, por ejemplo, la función  $F(z) = z^2$  y luego obtenemos  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$ .

```
F[z_] := z^2
w = ComplexExpand[F[x + I y]]
      x^2 + 2 I x y - y^2
{u, v} = {x^2 - y^2, 2 x y};
```

Como último paso utilizamos el comando **ParametricPlot3D** para graficar  $\psi(x, y, u, v)$

```
ParametricPlot3D[psi[{x, y, u, v}], {x, -2, 2},
  {y, -2, 2}] (Fig. 2)
```

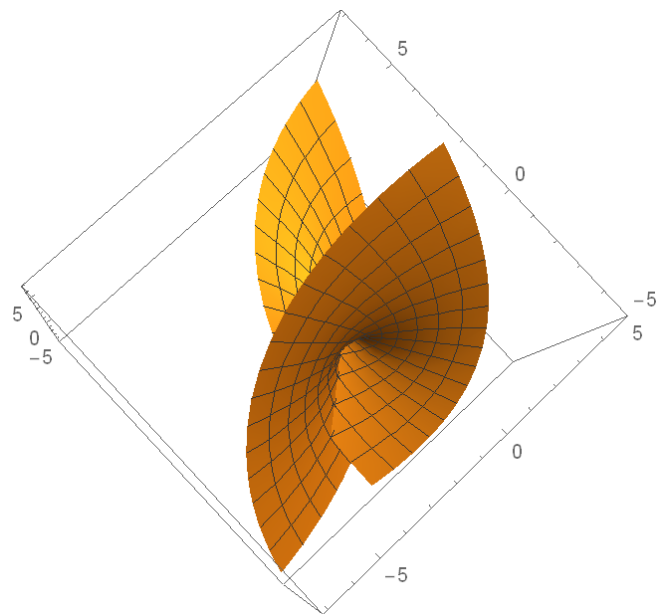


Figura 2: Representación gráfica de  $w = z^2$ .

Para abreviar y mejorar la presentación de los resultados implementaremos el comando **ComplexPlot** (basándonos en todo lo anotado desde el inicio de esta sección), así como los

comandos **ComplexMapping**  
**ComplexMappingPlot.**

**ComplexPlot**[ $z^3, \{z, -1 - I, 1 + I\}$ ] (Fig. 3)

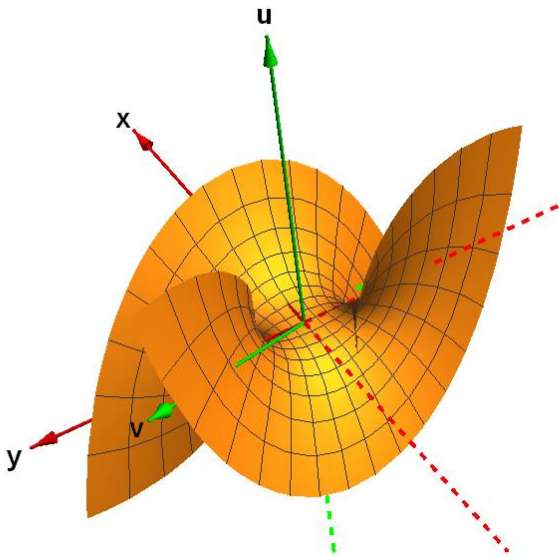


Figura 3: Representación gráfica de  $w = z^3$ .

**ComplexPlot**[ $\frac{z \text{Cos}[z]}{(z-1)^2(z^2+1)^2(z^2+3z+2)}$ ,  $\{z, -3 - 3I, 3 + 3I\}$ ] (Fig. 4)

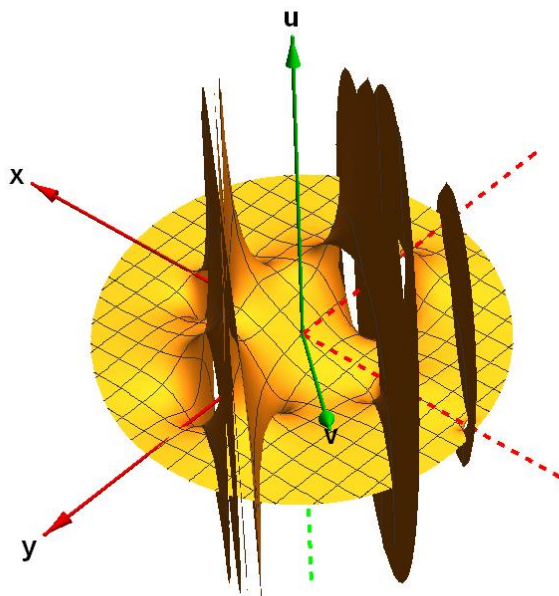


Figura 4: Representación gráfica de  $w = \frac{z \cos z}{(z-1)^2(z^2+1)^2(z^2+3z+2)}$ .

**ComplexPlot**[ $\Gamma[z], \{z, -3 - 3I, 3 + 3I\}$ ] (Fig. 5)

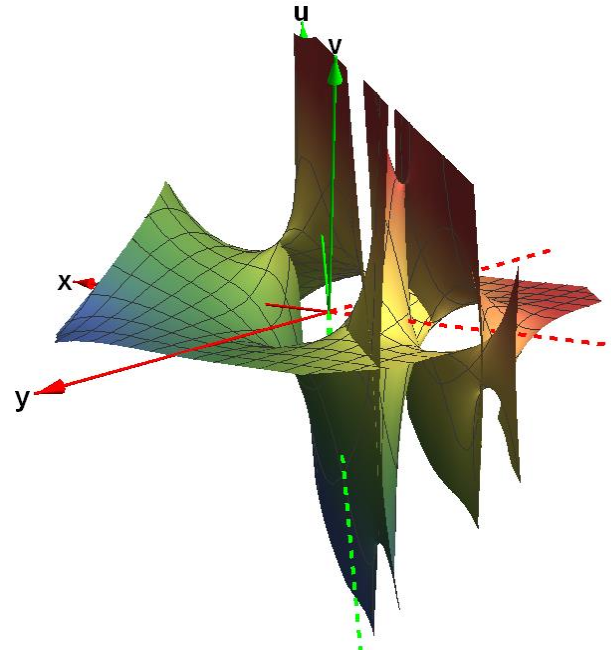


Figura 5: Representación gráfica de  $w = \Gamma(z)$ .

A continuación mostraremos un par de ejemplos en los que se aprecia la representación del efecto de las funciones complejas sobre regiones del plano complejo (mapeos), junto con la representación de las respectivas funciones. Esto se trata de manera similar al caso de funciones de valor real y una variable real.

**Mapping**[ $1/2 < x < 1, f == x^2, \{x, 1/2, 1\}$ ] (Fig. 6)



Figura 6: Efecto de  $f(x) = x^2$  sobre el intervalo  $\frac{1}{2} < x < 1$ .

**MappingPlot**[ $1/2 < x < 1, x^2, \{x, -1, 1.1\}$ ] (Fig. 7)

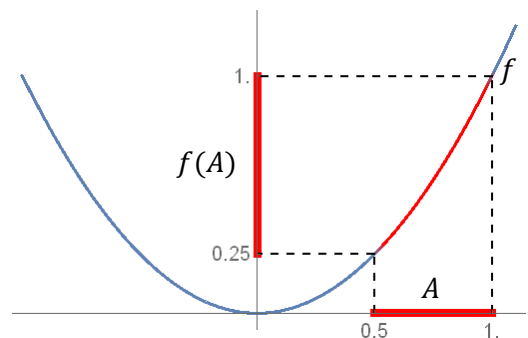


Figura 7: Efecto de  $f(x) = x^2$  sobre el intervalo  $\frac{1}{2} < x < 1$  junto con la gráfica de  $f$ .

**ComplexMapping**[ $0 < z < 1 + I, F == z^2,$   
 $\{z, 0, 1 + I\}$ ] (Fig. 8)

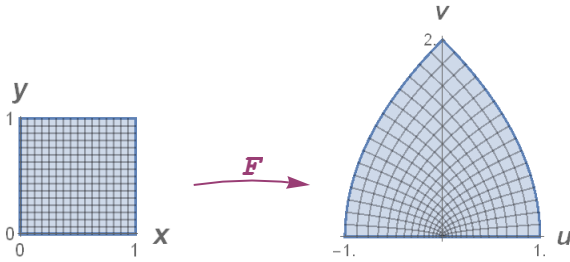


Figura 8: Efecto de  $F(z) = z^2$  sobre la región  $0 < \Re(z) < 1 \wedge 0 < \Im(z) < 1$ .

**ComplexMappingPlot**[ $0 < z < 1 + I, z^2,$   
 $\{z, -1 - I, 1 + I\}, \text{CutOfRegion} \rightarrow \text{True},$   
 $\text{PlotStyle} \rightarrow \text{Red}$ ] (Fig. 9)

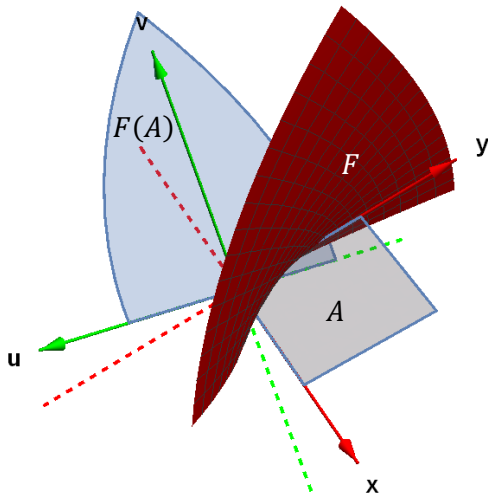


Figura 9: Efecto de  $F(z) = z^2$  sobre la región  $0 < \Re(z) < 1 \wedge 0 < \Im(z) < 1$  y la porción de la gráfica de  $F$  involucrada en dicho efecto.

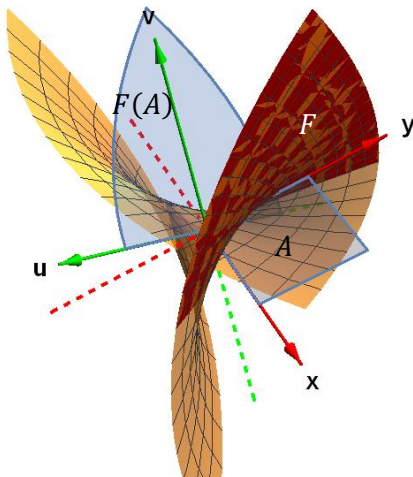


Figura 10: Una vista más detallada del efecto mostrado en la figura 9.

**ComplexMapping**[ $\frac{29}{100} < \text{Abs}[\frac{200z - (158 + 25I)}{500z - (653 - 80I)}] < \frac{31}{100},$   
 $F == z + \frac{1}{z}, \{z, -\frac{5}{4} - \frac{3}{4}I, \frac{5}{4} + \frac{9}{5}I\}$ ] (Fig. 11)

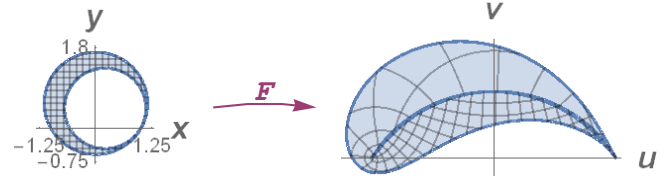


Figura 11: Efecto de  $F(z) = z + \frac{1}{z}$  sobre la región  $\frac{29}{100} < \left| \frac{200z - (158 + 25i)}{500z - (653 - 80i)} \right| < \frac{31}{100}$ .

**ComplexMappingPlot**[  
 $\frac{29}{100} < \text{Abs}[\frac{200z - (158 + 25I)}{500z - (653 - 80I)}] < \frac{31}{100}, z + \frac{1}{z},$   
 $\{z, -\frac{5}{4} - \frac{3}{4}I, \frac{5}{4} + \frac{9}{5}I\}, \text{CutOfRegion} \rightarrow \text{True},$   
 $\text{PlotStyle} \rightarrow \text{Red}$ ] (Fig. 12)

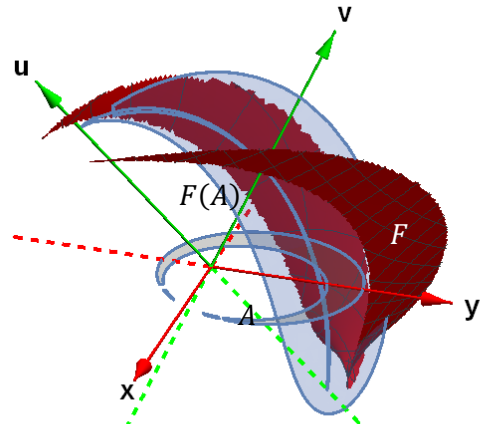


Figura 12: Efecto de  $F(z) = z + \frac{1}{z}$  sobre la región  $\frac{29}{100} < \left| \frac{200z - (158 + 25i)}{500z - (653 - 80i)} \right| < \frac{31}{100}$  y la porción de la gráfica de  $F$  involucrada en dicho efecto.

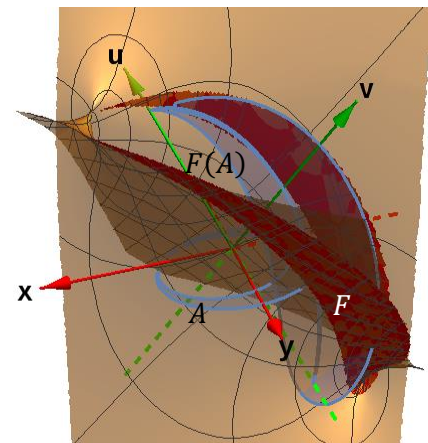


Figura 13: Una vista más detallada del efecto mostrado en la figura 12.

Para finalizar, mostraremos la representación gráfica de la “circunferencia compleja” definida por  $z^2 + w^2 = 1 + i$ . Para ello se grafican por separado las funciones  $w = \pm\sqrt{1+i-z^2}$  y luego se juntan tales gráficas.

```
a = ComplexPlot[ $\sqrt{1+I-z^2}$ , {z, -3 - 3I, 3 + 3I}];
b = ComplexPlot[- $\sqrt{1+I-z^2}$ ,
                {z, -3 - 3I, 3 + 3I}];
Show[a, b] (Fig. 14)
```

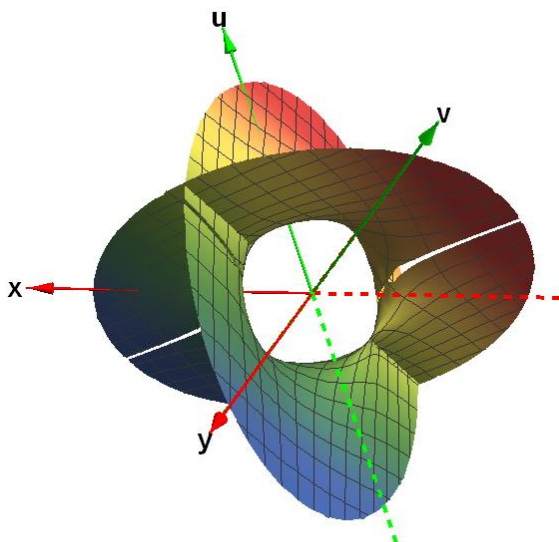


Figura 14: Representación gráfica de la “circunferencia compleja” definida por  $z^2 + w^2 = 1 + i$ .

## 5. Conclusiones

Este artículo presenta una propuesta para representar las gráficas de las funciones de valor complejo, de una variable compleja, mediante el uso de un modelo basado en una submersión que va del espacio tetra dimensional en el espacio tridimensional; como resultado se elaboran los comandos **ComplexPlot**, **ComplexMapping** y **ComplexMappingPlot**, en el *Mathematica*, los mismos que simplifican cálculos, minimizan líneas de código [9] y permiten las representaciones requeridas para entender los resultados del modelo propuesto. Todos los cálculos en este trabajo se han hecho en el *Mathematica* v10.0 en un Procesador Intel Core i3, 2.4 GHz y 4 GB de RAM.

## Agradecimientos

Los autores expresamos nuestro agradecimiento al Dr. Tomás Recio, Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación (Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria), por sus acertadas

sugerencias y críticas con respecto a la elaboración de este artículo.

## Referencias

- [1] J. H. Mathews y R. W. Howell, *Complex Analysis Project for Undergraduate Students*, <http://mathfaculty.fullerton.edu/mathews//complex.html>.
- [2] M. Eisenberg y D. J. M. Park, Jr., *Visualizing Complex Functions with the Presentations Application*. The *Mathematica Journal*, Volume 11, Issue 2 (2009).
- [3] Pacific Tech, *Visualizing Functions of a Complex Variable*. <https://www.pacifict.com/ComplexFunctions.html>
- [4] T. Banchoff, *Complex Function Graphs*. <http://www.math.brown.edu/~banchoff/gc/script/CFGInd.html>
- [5] WolframAlpha, *ComplexAnalysis*. <http://www.wolframalpha.com/examples/ComplexAnalysis.html>
- [6] S. Wolfram, *Enhanced Algebraic Computation*. <http://www.wolfram.com/mathematica/new-in-10/enhanced-algebraic-computation/>
- [7] S. Wolfram, *The Mathematica Book* (Fifth Edition). Wolfram Media, Champaign, IL & Cambridge University Press, Cambridge (2003).
- [8] R. Velezmoro y R. Ipanaqué, *Un modelo para visualizar objetos en 4D con el Mathematica*. ECIPerú, Volumen 11, Número 2 (2015).
- [9] R. Maeder, *Programming in Mathematica* (3rd. Edition). Addison-Wesley, MA (1997).

E-mail: rvelezmorol@unp.edu.pe,  
ripanaquec@unp.edu.pe